EDUCATIONAL APP

MAGGIE
IL TESORO DI SESHAT



COME E PERCHÉ PORTARE MAGGIE IN CLASSE

IL SOROPTIMIST TRASFORMA LA MATEMATICA IN UN'AVVENTURA
di Enrica Ficai Veltroni p. 3

UN'APP CONTRO L'ANSIA PER LA MATEMATICA
di Caterina Primi p. 4

GUIDA AGLI ENIGMI DELL'APP
di Gemma Carotenuto e Pietro Di Martino p. 9

Soroptimist International d'Italia
www.soroptimist.it

Il Soroptimist International d'Italia, associazione di donne impegnate nel mondo del lavoro con un'elevata qualifica professionale, sente come non più rinviabile il dovere di impegnarsi per il lavoro femminile, e lo fa con una vera e propria strategia, che si sviluppa con un'azione a tutto campo.

L'azione di Soroptimist Italia si rivolge a una popolazione femminile di età e di fasce sociali differenti: dalle bambine delle scuole primarie alle studentesse delle secondarie, con l'attenzione alle carriere STEM; dalle giovani donne che fanno il loro ingresso nel mondo del lavoro – fornendo loro "la cassetta degli attrezzi" con corsi di *coaching* e tirocini – alle donne delle fasce deboli, vittime di violenza e detenute, con percorsi professionalizzanti.

È di tutta evidenza che l'attenzione alle carriere STEM risponde a una richiesta del mondo del lavoro già del presente, e che diventerà un imperativo nel futuro prossimo.
I recenti dati di Assolombarda, infatti, ci dicono che entro il 2025 l'occupazione crescerà complessivamente del 3%, ma le assunzioni di professionisti di informatica aumenteranno del 14,9% e quelle di ingegneri e ricercatori del 36,9%.
In poche parole, nei prossimi anni la richiesta di professioni STEM si svilupperà in maniera esponenziale rispetto a quella di professioni tradizionali.

Contemporaneamente, gli ultimi dati OCSE ci dicono che in ambito STEM i laureati, in Italia, sono il 25% del totale. E di questi laureati STEM il 65% sono maschi e solo il 35% sono femmine.
E, infine, secondo i dati del MIUR del 2017 solo il 5% delle ragazze italiane di 15 anni aspira a intraprendere professioni tecnico-scientifiche.

L'Organizzazione per la Cooperazione e lo Sviluppo Economico individua fra le cause di questa realtà anche "l'ansia della matematica".
L'applicazione Maggie va proprio nella direzione giusta: la tecnica del *problem solving* sviluppa le abilità matematico-scientifiche, lo sviluppo di tale abilità favorisce il superamento delle difficoltà in questo campo, il gioco diverte e libera dall'ansia.

A tutti i colleghi docenti quindi gli auguri più sinceri di buon lavoro e "buon divertimento".

Patrizia Salmoiraghi
Presidente Soroptimist International d'Italia

IL SOROPTIMIST TRASFORMA LA MATEMATICA IN UN'AVVENTURA

di Enrica Ficai Veltroni,
Soroptimist International Club Firenze - responsabile del progetto Maggie

L'app *Maggie-Il Tesoro di Seshat* nasce sotto una buona stella. Forse perché fin dal principio il nome del progetto è stato scelto pensando a Margherita Hack, illustre astrofisica e divulgatrice scientifica che ha vissuto tanti anni a Firenze.
Maggie, infatti, nasce nel Soroptimist Club Firenze da un'idea di Enrica Ficai Veltroni, creativa pubblicitaria, e Caterina Primi, docente di Psicometria dell'Università di Firenze, per contrastare fin dai primi anni di scuola lo stereotipo di genere che vede le femmine meno portate dei maschi per le materie scientifiche e, allo stesso tempo, allenare il pensiero logico matematico di bambine e bambini in modo divertente, aiutandoli ad allentare l'ansia della matematica.
Come? Con un videogioco d'avventura nel quale una ragazzina intraprendente - Maggie, nei panni della quale tutti devono giocare - si cimenta nella risoluzione di divertenti enigmi per completare la storia.

Un bel progetto, certo, ma per realizzarlo era necessaria una grande squadra e Maggie, con ingegno e simpatia, è riuscita presto a metterla insieme. Al Club Firenze si sono uniti il Soroptimist International d'Italia e altri 48 Club Soroptimist sparsi per tutta la Penisola, che hanno sostenuto economicamente il progetto e hanno promosso l'app.
A loro si sono aggiunti Pietro Di Martino, docente di Matematiche complementari all'Università di Pisa e delegato per la formazione degli insegnanti, che ha curato i contenuti scientifici del gioco; e Studio Evil di Bologna, che ha inventato l'avventura *Il Tesoro di Seshat* e sviluppato l'app.



La squadra di Maggie ha lavorato così bene insieme che, dopo il rilascio sulle piattaforme iOs e Android, questa piccola app gratuita Soroptimist per dispositivi mobili, priva di investimenti pubblicitari, ha cominciato spontaneamente a diffondersi diventando nel giro di pochi giorni app di tendenza su PlayStore e continuando anche in seguito a mietere download e valutazioni positive.
Non solo, l'app ha conquistato anche la piena attenzione del MIUR, che l'ha inserita sul portale noisiamopari.it, e quella di Giunti Scuola, che ha deciso di diffonderla tramite il Sussidiario delle discipline di quarta e quinta e di aiutare il Soroptimist nella realizzazione di questa breve guida digitale di accompagnamento all'app. La guida si pone l'obiettivo di aiutare gli insegnanti a preparare alcune coinvolgenti attività di *problem solving* da svolgere in classe a partire dagli enigmi di Maggie.

Il Soroptimist è convinto, infatti, che la Matematica possa diventare per tutti un'avventura da vivere con curiosità e passione, se viene affrontata con il piede giusto fin dai primi anni di scuola.
Chissà che iniziare sotto una buona stella non aiuti tanti studenti a trovare davvero un tesoro: un brillante futuro nelle STEM, per esempio. Questo è l'augurio di Maggie e di tutte le soroptimiste che hanno collaborato al progetto.

UN'APP CONTRO L'ANSIA PER LA MATEMATICA

di Caterina Primi,
Neurofarba – Università di Firenze

Cos'è l'ansia per la matematica?

Se si chiede alle persone di pensare alla matematica oppure di fare dei calcoli, come per esempio trasformare una percentuale o stimare la probabilità, si possono avere reazioni di disagio, malessere, fino al rifiuto. È stato osservato che avere a che fare con i numeri può creare un senso di tensione e di frustrazione che si può presentare non solo in un contesto scolastico ma anche nella vita di tutti i giorni. Pur presentando caratteristiche simili ad altre forme di ansia, quella verso la matematica è una forma di ansia distinta sia dall'ansia generale che dall'ansia per la performance, manifestandosi in situazioni specifiche cioè quando utilizziamo i numeri (Hembre, 1990).
Dalla metà del secolo scorso alcuni autori hanno cercato di studiare le caratteristiche di questa forma d'ansia basandosi sull'osservazione concreta e sull'esperienza pratica nell'ambito dell'insegnamento. Le ricerche che ne hanno indagato i sintomi a livello fisiologico hanno descritto un aumento della frequenza cardiaca, la presenza di mani sudate, mal di stomaco e vertigini. Per meglio evidenziare tali sintomi è stata confrontata la reattività fisiologica degli studenti durante il completamento delle attività matematiche rispetto a quelle del completamento degli anagrammi. I risultati hanno mostrato che gli studenti con alti livelli di ansia matematica mostrano un aumento maggiore nella reattività cardiovascolare quando risolvono compiti matematici rispetto agli studenti con un basso livello di ansia per la matematica.

» La diffusione dell'ansia per la matematica

Il grande interesse che in particolare la ricerca ha dimostrato verso questa forma di ansia è dovuto alla sua diffusione (Morsany et. al., 2017). Si stima che di circa il 20% della popolazione adulta manifesti questi sintomi, con una maggiore prevalenza nelle donne. Studi recenti hanno confermato la presenza di ansia per la matematica anche in bambini nei primi anni della scuola primaria (Aarnos & Perkkilä, 2012).
Il PISA (*Programme for International Student Assessment*) - una prova standardizzata messa a punto dall'OCSE (Organizzazione per la Cooperazione e lo Sviluppo Economico) per studenti di scuola superiore somministrata in 65 paesi - ha previsto nel 2012 un particolare approfondimento per la matematica. I risultati mostrano che il 59% dei partecipanti ha riportato la preoccupazione di non riuscire in matematica, il 31% dichiara di sentirsi a disagio durante lo svolgimento di quesiti matematici, il 33% di sentirsi nervoso quando deve svolgere compiti per casa di matematica e il 61% afferma di essere preoccupato di prendere un voto basso (OECD, 2013, vol. III). L'insieme di questi risultati ci conferma come l'ansia per la matematica sia un fenomeno globale che coinvolge studenti provenienti da contesti sia culturali che scolastici diversi.
Occorre considerare un altro dato che emerge in questa rilevazione internazionale sulle differenze di genere. In particolare, per quanto riguarda la matematica, in molti paesi il divario di genere pesa a favore dei maschi. L'Italia risulta tra i paesi con il divario maggiore, nonostante ci sia stato un incremento nella performance in matematica sia nei maschi che nelle femmine rispetto alla rilevazione PISA precedente.

Quali sono gli effetti dell'ansia verso la matematica?

Tra gli effetti dell'ansia per la matematica il più indagato è quello diretto sulla performance. Dal confronto degli studi che hanno indagato tale relazione (tra gli altri Dowker, Sarkar & Looi, 2016), risulta che gli studenti con elevata ansia hanno un rendimento più basso in matematica. Tale relazione, anche se con forza diversa, è stata riscontrata in tutti i livelli scolastici, a partire dai bambini frequentanti la scuola primaria fino agli studenti universitari. Nonostante l'ansia per la matematica non sia il solo predittore del rendimento, risulta esserne un predittore significativo. Dalle rilevazioni condotte con il PISA risulta infatti che circa il 14% della varianza della performance è spiegata dall'ansia e questa relazione rimane anche controllando sia il genere che lo status socioeconomico.

» Gli effetti sulle strategie di apprendimento

Occorre inoltre considerare che l'ansia per la matematica ha effetti sulle strategie di apprendimento: gli studenti con alti livelli di ansia matematica sembrano investire meno tempo e sforzi nell'apprendimento, organizzano il loro ambiente di apprendimento in modo meno efficiente e più spesso mostrano comportamenti di procrastinazione, tendendo a posticipare il loro coinvolgimento sia nel lavoro a casa che nella preparazione per gli esami, riducendo quindi la pratica costante che in matematica è necessaria per acquisire fluidità e senso di autoefficacia. In questo modo al momento della prova si sentiranno inadeguati e proveranno maggiore ansia che potrà interferire nella loro performance. La procrastinazione provoca quindi un circolo vizioso: gli studenti ansiosi per la matematica evitano di esercitarsi, si comportano al di sotto delle aspettative negli esami e nelle prove, di conseguenza sviluppano livelli ancora più elevati di ansia verso la matematica.

» Gli effetti sulla carriera

L'ansia per la matematica ha inoltre un effetto più a lungo termine interferendo nelle decisioni di carriera: gli studenti con elevata ansia evitano l'iscrizione non solo a corsi di matematica, ma anche in settori correlati come la scienza, la tecnologia e l'ingegneria, orientandosi di più verso corsi di studio con meno matematica. Queste scelte influenzano l'ulteriore sviluppo di conoscenze e abilità, nonché atteggiamenti e auto-valutazioni in relazione alla matematica. Di conseguenza al termine del percorso scolastico gli studenti con alti livelli di ansia in matematica si considerano meno capaci e si aspettano di avere difficoltà nell'utilizzo dei numeri.

Questo effetto risulta particolarmente evidente nelle ragazze, per le quali nella scelta pesa di più un fattore come l'ansia che le loro conoscenze reali in matematica. Questo appare in linea con quanto riportato da alcuni studi condotti in Italia (Tomasetto, Galdi & Cadinu, 2012), che mostrano differenze nel numero di uomini e di donne iscritti ai corsi di laurea di ambito scientifico nel contesto italiano. Risulta infatti un processo di auto-selezione sulla base del genere, in particolare emerge che solo le donne altamente competenti nella disciplina tendono a intraprendere studi di tipo matematico, mentre gli uomini potrebbero essere più propensi a perseguire carriere scientifiche anche quando meno preparati.

Quali fattori spiegano la relazione tra ansia e performance in matematica?

Gli effetti che l'ansia per la matematica ha sulla performance ha portato alla necessità di meglio capire i fattori che spiegano tale relazione. Recenti rassegne evidenziano come sia necessario indagare non solo fattori individuali, cognitivi e motivazionali ma anche fattori ambientali, legati al contesto sociale in cui lo studente è inserito (Chang & Beilock, 2016).

Tra i fattori cognitivi è stato indagato l'effetto dell'ansia per matematica sulla memoria di lavoro, che rappresenta uno spazio di lavoro temporaneo che ha la funzione di tenere a mente gli oggetti durante l'esecuzione di un'attività secondaria (Aschcraft & Kirk, 2001). Il mal funzionamento della memoria di lavoro coinvolge aspetti specifici della competenza matematica, in particolare l'accuratezza (la correttezza delle soluzioni) e la fluidità processuale (la capacità di applicare le procedure in modo efficiente, entro un breve lasso di tempo e con il minimo sforzo). Negli studenti con ansia elevata pensieri intrusivi e preoccupazioni sembrano interferire in particolare sulla fluidità nella performance in matematica. Inoltre, l'ansia sconvolge l'equilibrio tra i due sistemi attenzionali: quello orientato agli obiettivi e quello basato sugli stimoli. In particolare, fa sì che il sistema guidato dallo stimolo diventi dominante, riducendo così la capacità di concentrarsi su attività rilevanti (Rubistein, Eidlin, Wohl & Akibli, 2015).

» L'influenza del contesto sociale

Nonostante i numerosi contributi della ricerca sull'effetto dei fattori cognitivi, occorre sottolineare l'influenza che anche il contesto sociale ha sulla formazione dell'ansia per la matematica e sul suo effetto sul rendimento (Wang et al. 2014). È stato rilevato che persone significative, come genitori o insegnanti, con i loro atteggiamenti verso la matematica possono influenzare l'atteggiamento dei propri figli o allievi. Gli insegnanti, per esempio, possono diffondere la credenza che l'abilità matematica è innata e solo chi ha questo talento potrà avere successo in questa disciplina. Inoltre, è stato rilevato che gli insegnanti della scuola primaria hanno un'influenza sul livello d'ansia dei propri studenti, trasferendo a questi la propria ansia in matematica.
Tale effetto sembra essere in particolar modo rilevante sulle studentesse: il livello di ansia matematica dell'insegnante influenza sia il loro rendimento, che la percezione delle loro abilità in matematica (Beilock, Gunderson, Ramirez & Levine, 2010). In particolare, le insegnati sembrano diffondere lo stereotipo della matematica come una disciplina "da maschi". L'effetto di tale stereotipo è stato indagato da numerosi autori mostrando come possa essere considerato uno dei fattori capaci di rendere le donne più vulnerabili nella loro *performance.* Le ragazze infatti, interiorizzando tale stereotipo, si considerano come meno dotate dei ragazzi e mostrano una minore autoefficacia. In particolare, nelle situazioni di valutazione lo stereotipo interiorizzato influisce sulla percezione della difficoltà del compito ed è correlato a un aumento di tensione e a una diminuzione delle prestazioni.
Tra le figure significative hanno certamente un ruolo rilevante quelle dei genitori, in particolare le loro credenze stereotipate riguardo alle capacità in matematica dei figli, che sembrano avere un forte impatto sulla loro autovalutazione. Le madri in particolare influenzano l'atteggiamento delle loro figlie nei confronti della matematica e la loro ansia per questa disciplina (Casad, Hale & Wachs, 2015).

Cosa si può fare per ridurre l'ansia per la matematica?

Dato il contributo del contesto sociale nello sviluppo dell'ansia verso la matematica, sono state proposte alcune indicazioni operative che sia insegnanti che genitori potrebbero seguire per favorirne l'apprendimento e ridurre così nei bambini una reazione di evitamento.

» Il ruolo degli insegnanti

Gli insegnanti, proprio per ridurre l'ansia, dovrebbero incoraggiare gli studenti a diventare entusiasti della matematica, a sviluppare un atteggiamento positivo e a considerarsi dei risolutori di successo di problemi matematici. Ecco quindi che diventa importante creare dei

contesti di apprendimento che siano stimolanti e facilitino la partecipazione. In particolare, risulta rilevante incoraggiare a provare, a sperimentare in modo da trovare possibili soluzioni. Occorre inoltre fare appello al senso di autoefficacia e a considerare gli errori stessi una parte di un apprendimento di successo.
L'utilizzo di dispositivi può rappresentare quindi un utile supporto per gli insegnanti per creare contesti di apprendimento per la classe che stimolano al confronto e alla ricerca insieme di soluzioni. È stato rilevato infatti come attraverso l'uso degli e*ducational game* si possa contribuire a ridurre l'ansia nei confronti della matematica e a incrementare la performance in questa disciplina (Jansen et al., 2012).

» App Maggie: un utile strumento

In questa prospettiva l'app Maggie può rappresentare un utile strumento. Giocare insieme a Maggie, partecipare alle sue avventure, trovare soluzioni ai diversi enigmi, consente sia un consolidamento delle competenze, che un aumento del senso del saper fare e di conseguenza una riduzione dell'ansia. Il gioco incoraggia a un apprendimento attivo, stimolando all'esplorazione e al pensare per trovare possibili soluzioni. Inoltre, consente di ricevere feedback immediati e allo stesso tempo dà la possibilità di tentare più volte senza il timore di una valutazione. In questo modo gli studenti potranno concentrarsi maggiormente sui loro successi che sui loro fallimenti e potranno credere nelle loro capacità invece di dubitarne.
Il vantaggio di disporre di un gioco in un contesto educativo risiede nel fatto che aiuta chi ne fa uso a imparare divertendosi. Maggie nelle sue avventure è accompagnata da un gruppo di amici che insieme a lei affrontano gli enigmi. Alla classe può essere proposto di giocare insieme, come Maggie e i suoi amici. Il gioco diventa anche un terreno di confronto e scambio, proponendo un modo di fare matematica in maniera cooperativa, superando una modalità solo competitiva.

» Il ruolo dei genitori

Tra le figure che hanno un ruolo rilevante nella riduzione dell'ansia verso la matematica, troviamo anche i genitori. Alcuni studi hanno evidenziato l'importanza di creare occasioni per svolgere insieme ai figli attività che prevedano l'utilizzo dei numeri. Divertirsi insieme con i numeri (giochi da tavolo, videogiochi) contribuisce a sviluppare un positivo concetto di sé e quindi a ridurre l'evitamento e la mancanza di pratica. È stato osservato che aumentare a casa le attività con la matematica porta a un miglioramento della performance tra gli studenti con elevata ansia. In uno studio condotto con bambini della scuola primaria in cui veniva utilizzato l'iPad per svolgere insieme ai genitori problemi matematici, è emerso un incremento significativo del rendimento rispetto a un gruppo di controllo che svolgeva attività di lettura (Berkowitz et al. 2015). Tale effetto emergeva in particolare per quei bambini i cui genitori avevano un elevato livello d'ansia. L'effetto anche di brevi interazioni (adulti/bambini) con oggetto *la matematica* sembra quindi aiutare a ridurre la "trasmissione" dell'ansia verso la matematica tra genitori e figli. L'app Maggie può aiutare genitori e bambini a fare la matematica insieme, divertendosi e riducendo quindi un senso di tensione e di inadeguatezza.

» Combattere gli stereotipi di genere

In base agli stereotipi si attribuiscono, agli uomini e alle donne, capacità diverse in base al loro ruolo sociale derivato dalla divisione del lavoro e dai ruoli storicamente ricoperti. In questa prospettiva si associano alle donne caratteristiche coerenti con il loro ruolo domestico e di cura (come la capacità di pensare agli altri, di essere attente alle relazioni, di provare empatia e comprensione) e agli uomini caratteristiche coerenti con il loro ruolo di lavoratori (come l'essere autocentrati, orientati al compito, impegnati nel raggiungimento dei propri obiettivi). È quindi per gli stereotipi che le donne tendono a scegliere studi e carriere in ambiti umanisti-

ci, o di cura della persona, e gli uomini si orientano più frequentemente verso ambiti scientifici e tecnici. È quindi necessario che sia gli insegnanti che gli stessi genitori contribuiscano a combattere lo stereotipo che vede la matematica come una disciplina per maschi, perché rende le bambine più vulnerabili e insicure nelle loro performance. Portare esempi contro-stereotipici, come ad esempio figure di donne di successo in ambiti tradizionalmente maschili, si è dimostrata una strategia efficace per ridurre la forza degli stereotipi e le loro conseguenze. La scelta di Maggie, in quanto protagonista femminile, rappresenta un modo per offrire un modello alternativo a un'immagine stereotipata presente spesso nelle app, dove le bambine appaiono in prevalenza dedicate alla cura dell'estetica e quindi fin da piccole presentate come inadatte a cimentarsi in determinati campi. Troppo spesso anche nei giochi si consolidano stereotipi e credenze riguardo ai ruoli che donne e uomini dovrebbero assumere. Giocare con Maggie è un modo per proporre attività matematiche attraenti sia per maschi che per femmine. Ecco quindi che proprio con protagoniste come Maggie si riesce a offrire alle bambine e ai bambini modelli che consentono di educare alla parità di genere nell'ambito della matematica.

Bibliografia

Aarnos, E., & Perkkilä, P. (2012). Early signs of mathematics anxiety? *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *46*, 1495-1499.
Ashcraft, M. H., & Kirk, E. P. (2001). The relationships among working memory, math anxiety, and performance. *Journal of Experimental Psychology: General*, *130*(2), 224.
Beilock, S. L., Gunderson, E. A., Ramirez, G., & Levine, S. C. (2010). Female teachers' math anxiety affects girls' math achievement. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *107*(5), 1860-1863.
Berkowitz, T., Schaeffer, M. W., Maloney, E. A., Peterson, L., Gregor, C., Levine, S. C., & Beilock, S. L. (2015). Math at home adds up to achievement in school. *Science*, *350*(6257), 196-198.
Blazer, C. (2011). Strategies for Reducing Math Anxiety. Information Capsule. Volume 1102. *Research Services, Miami-Dade County Public Schools*.
Casad, B. J., Hale, P., & Wachs, F. L. (2015). Parent-child math anxiety and math-gender stereotypes predict adolescents' math education outcomes. *Frontiers in psychology*, *6*, 1597.
Chang, H., & Beilock, S. L (2016). The math anxiety-math performance link and its relation to individual and environmental factors: a review of current behavioral and psychophysiological research. *Current Opinion in Behavioral Sciences*, *10*, 33-38.
Dowker, A., Sarkar, A., & Looi, C. Y. (2016). Mathematics anxiety: What have we learned in 60 years? *Frontiers in psychology*, *7*, 508.
Hembree, R. (1990). The nature, effects, and relief of mathematics anxiety. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33-46.
Jackson, E. (2008). Mathematics anxiety in student teachers. *Practitioner Research in Higher Education*, *2*(1), 36-42.
Jansen, B. R., Louwerse, J., Straatemeier, M., Van der Ven, S. H., Klinkenberg, S., & Van der Maas, H. L. (2012). The influence of experiencing success in math on math anxiety, perceived math competence, and math performance. *Learning and Individual Differences*, *24*, 190-197.
Morsanyi, K., Mammarella, I. C., Szucs, D., Tomasetto, C., Primi, C., Maloney, E. A., eds. (2017). Mathematical and Statistics Anxiety: Educational, Social, Developmental and Cognitive Perspectives. Lausanne: Frontiers Media.
OECD (ed.) (2013), Issue 3, Ready to Learn: Students' Engagement, Drive and Self-Beliefs in OECD Countries.Paris.
Rubinsten, O., Eidlin, H., Wohl, H., & Akibli, O. (2015). Attentional bias in math anxiety. *Frontiers in Psychology, 6*.
Tomasetto, C., Galdi, S., & Cadinu, M. (2012). Quando l'implicito precede l'esplicito: gli stereotipi di genere sulla matematica in bambine e bambini di 6 anni. *Psicologia sociale*, *7*, 169-185.
Wang, Z., Hart, S. A., Kovas, Y., Lukowski, S., Soden, B., Thompson, L. A., ... & Petrill, S. A. (2014). Who is afraid of math? Two sources of genetic variance for mathematical anxiety. *Journal of child psychology and psychiatry*, *55*(9), 1056-1064.

GUIDA AGLI ENIGMI DELL'APP



GUIDA AGLI ENIGMI DELL'APP

Dall'app al lavoro in classe

di Gemma Carotenuto e Pietro Di Martino,
Ricercatori in didattica della Matematica

» Gli obiettivi dell'app

Come scritto nei paragrafi introduttivi di questa guida, l'app Maggie nasce inseguendo diversi obiettivi, significativi e ambiziosi. Il primo è contribuire a mettere in discussione, o comunque almeno a discutere, gli stereotipi di genere attraverso la scelta di una ragazza, Maggie, come protagonista dell'avventura.
Un ulteriore obiettivo è quello di stimolare i bambini e le bambine a maturare il gusto per la sfida intellettuale (e non competitiva) attraverso enigmi matematici in un contesto accattivante, sia dal punto di vista grafico che narrativo.
D'altra parte l'app è stata progettata anche per perseguire uno specifico obiettivo educativo, relativo alla matematica. Questo ha guidato, nella costruzione degli enigmi, sia la scelta degli argomenti in gioco che il tipo di richieste: in particolare, si è cercato da una parte di mettere in gioco concetti significativi dell'educazione matematica a livello di scuola primaria e non solo (quali ad esempio l'idea di multiplo di un numero intero), dall'altra di proporre problemi e non esercizi, stimolando il pensiero produttivo e la riflessione, piuttosto che il pensiero riproduttivo, e allo stesso tempo dando la possibilità di provare e di sbagliare.

» Pensiero produttivo e argomentazione

Questa scelta nasce dalla convinzione che tra gli obiettivi più significativi dell'educazione matematica, soprattutto ai primi livelli scolari, ci sia proprio lo sviluppo della capacità di affrontare problemi (attivando il pensiero produttivo) e delle capacità argomentative. D'altra parte, tradizionalmente l'insegnamento della matematica a livello di scuola primaria, e non solo, è spesso basato su un approccio meramente riproduttivo e poco incline alla richiesta di spiegazioni (soprattutto quando emerge ***la risposta giusta***).
L'approccio tradizionale ai problemi privilegia gli esercizi ripetitivi, con l'idea che l'esercizio sia accessibile quasi a tutti (anche ai molti che hanno difficoltà) e che permetta di ottenere con maggiore probabilità risposte corrette, meglio ancora se date velocemente. Le scelte dell'insegnante veicolano i valori dell'insegnante rispetto alla disciplina, e da questo tipo di scelte passa l'idea che in matematica si debba fare "come ci è stato fatto vedere da qualcuno" (riproduzione) e che *errore* e *tempo* siano dei nemici. Non è un caso che molti allievi, anche da adulti, associno al tempo in matematica la frustrazione (per la sensazione di non avere tempo sufficiente o di essere più lenti degli altri) e la paura di sbagliare.
Eppure, lo sviluppo delle competenze legate al *problem solving* e all'argomentazione è considerato fondamentale nelle Indicazioni Nazionali, tant'è che tra i **traguardi di competenza alla fine della scuola primaria** troviamo il seguente: "Riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati. Descrive il procedimento seguito e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria".

» Portare Maggie in classe: perché?

Da questa premessa di condivisione degli obiettivi educativi emerge con forza la necessità, per perseguirli attraverso l'app, di un ritorno importante del gioco in classe. L'app crea un contesto accattivante potenzialmente di supporto, ma è evidente come il semplice giocare con l'app, se non accompagnato da attività continuative e discussioni guidate da un adulto esperto e dal confronto tra pari, non porti a un significativo apprendimento matematico. Facciamo un esempio che ha a che fare con il contesto matematico, ma non solo: pensiamo alla questione degli stereotipi di genere. La scelta del coraggioso e ingegnoso personaggio di Maggie vuole essere un messaggio. Tale messaggio ha comunque bisogno di essere discusso in profondità, non solo per non rischiare di rimanere inascoltato o incompreso, ma anche per permettere di far emergere e discutere le probabili visioni contrastanti (altrimenti non si parlerebbe di stereotipi): non si riesce a mettere in discussione uno stereotipo se non lo si fa emergere e lo si discute.

In una sperimentazione didattica con un simile contesto narrativo, ma senza l'ausilio della app, in diverse classi nacque una discussione molto significativa sul fatto che fosse strano che la principessina coraggiosa dovesse salvare il principino.
La necessità di un ritorno (non occasionale) in aula è ancora più evidente se si vuole condividere l'importanza del pensiero produttivo e l'attenzione ai processi risolutivi (talvolta anche al di là della correttezza della risposta finale) in matematica.

Le pagine che seguono vogliono dare un contributo in questa direzione: per diversi enigmi contenuti nell'app, si forniscono spunti e approfondimenti per l'attività in classe. Portare Maggie in aula può voler dire, per l'insegnante, focalizzare l'attenzione sui processi di approccio agli enigmi e sul confronto tra questi processi, sottolineando ad esempio la varietà delle possibili strategie risolutive; può approfondire contenuti matematici coinvolti negli enigmi; può condurre gli allievi a una generalizzazione degli enigmi presentati nell'app, attraverso un'attività di *problem posing* e *problem solving*; può rendere gli enigmi non risolvibili e indirizzare la discussione sul mostrare le ragioni matematiche che determinano l'impossibilità di risoluzione, sviluppando il pensiero critico, ecc.

Chiudiamo questa premessa condividendo una nostra convinzione: affrontare problemi non è solo un elemento essenziale dell'educazione matematica, ma è anche a nostro avviso la parte più bella del fare matematica.
Non siamo soli a pensarla così; è di Ennio De Giorgi, importantissimo matematico del secolo scorso, il seguente pensiero: "Un bel problema, anche se non lo risolvi, ti fa compagnia se ci pensi ogni tanto".

Bersagli

Uno sguardo agli enigmi: struttura e obiettivi

Nella serie di enigmi "Bersagli" Maggie deve lanciare i suoi aeroplanini di carta verso classici bersagli rotondi divisi a spicchi, ma anche verso il banchetto di un mercante dove sono esposti oggetti antichi o ancora verso uno splendido pannello su cui sono riportati misteriosi geroglifici egizi. Ad ogni zona dei bersagli è associato un numero; Maggie ha il compito di totalizzare un determinato punteggio attraverso, di volta in volta, somme o prodotti di due o più numeri ottenuti con i suoi lanci.

Riportiamo in tabella le consegne relative ai quattro enigmi della serie "Bersagli".

Enigma	**La sfida con le parole di Maggie**
Il bersaglio di Maggie	"È il momento di prendere la mira e colpire il bersaglio! La somma delle aree colpite deve dare 12 come risultato!"
La sfida di Ed	"Ed mi ha sfidata a colpire delle aree che sommate diano 100. Potrei farcela anche a occhi chiusi!"
La sfida del gatto nero	"Devo farcela, devo colpire gli oggetti che moltiplicati diano 12!"
Il bersaglio di Seshat	"È un bersaglio come quelli con cui gioco di solito, e devo colpire i numeri che sommati diano il risultato giusto. Soltanto che i numeri sono scritti con simboli diversi..."

In tutti i quesiti di questa tipologia, l'aspetto ludico di simulazione del lancio, che porta con sé una sfida legata alla precisione del gesto, si intreccia con l'aspetto matematico: la strategia a priori legata ad una previsione aritmetica (ad es., per fare 12 sommando i punteggi mi basta colpire due volte l'area contrassegnata dal punteggio 6) può dover essere ridiscussa di volta in volta in base all'area effettivamente colpita.

Gli enigmi vogliono dunque portare il giocatore a:

- recuperare dalla memoria fatti aritmetici, additivi (ad es., quando si ricorda che 7+5=12) e moltiplicativi (ad es., quando si ricorre alle tabelline per richiamare l'uguaglianza 12=3x4);
- ricorrere alle proprie strategie di calcolo mentale (come quando è necessario determinare il numero n tale che 75+n=100).

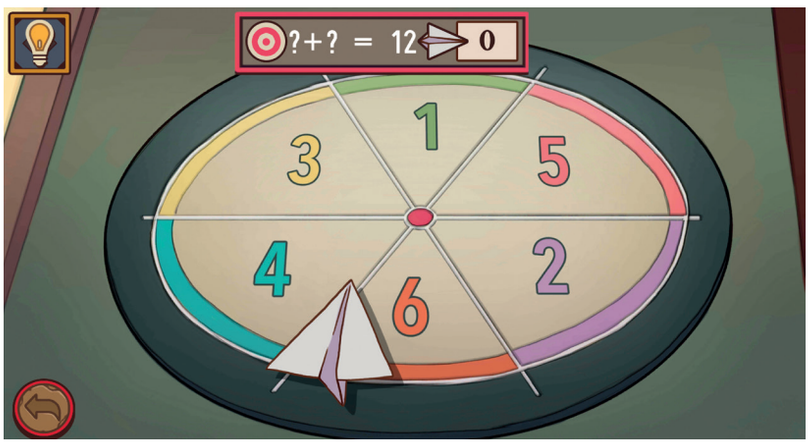
Queste finalità sono legate al seguente ***obiettivo di apprendimento al termine della classe 5a primaria*** delle Indicazioni Nazionali: *Eseguire le quattro operazioni con sicurezza, valutando l'opportunità di ricorrere al calcolo mentale, scritto o con la calcolatrice a seconda delle situazioni.*

Se analizziamo più da vicino i quattro enigmi troviamo però molti altri spunti e possibili intrecci con gli obiettivi fissati dalle Indicazioni Nazionali.

I primi tre enigmi: riflessioni su somma e prodotto

Riflettiamo sul primo e sul terzo enigma della serie. In tutti e due i casi è richiesto a Maggie di totalizzare il punteggio complessivo di 12, ma se nel primo caso (Fig. 1) i punteggi parziali ottenuti con ogni singolo lancio vanno sommati, nel terzo (Fig. 2) vanno moltiplicati tra loro.

◆ **Fig. 1: Il bersaglio di Maggie**



◆ **Fig. 2: La sfida del gatto nero**



Elenchiamo brevemente alcuni possibili spunti di discussione in classe, sia sui singoli enigmi che sul confronto tra i due (e dunque tra addizione e prodotto). In entrambi i casi, i bambini dovrebbero accorgersi di due fatti importanti:

- un solo tiro non può bastare per raggiungere il numero voluto (il massimo punteggio possibile con un tiro è 6);

- si può raggiungere il punteggio desiderato di 12 in tanti modi diversi (colpendo aree diverse, oppure le stesse aree ma in ordine diverso, o ancora con un numero differente di lanci).

D'altra parte, una differenza importante è che ne "Il bersaglio di Maggie" si sia sicuri di aver fallito solo quando si raggiunge un punteggio superiore a 12 (infatti, essendo presente il punteggio 1, da qualsiasi punteggio inferiore a 12 si può sempre raggiungere 12 con tanti 1); mentre ne "La sfida del gatto nero" c'è un punteggio inferiore a 12 (5) che certifica il fallimento, perché 5 non è divisore di 12. Si può inoltre notare che, in quest'ultimo enigma, il bersaglio 1 "non smuove le cose" (detto in termini tecnici, 1 è l'elemento neutro della moltiplicazione).
Tutti questi aspetti, come detto nell'introduzione metodologica, possono essere affrontati in maniera molto ricca attraverso una discussione matematica orchestrata dall'insegnante. L'insegnante ha anche il ruolo di "creare occasioni": se infatti, come possibile, dovesse emergere un'unica strategia da parte degli allievi per raggiungere l'obiettivo, può essere l'insegnante a giocare e intenzionalmente fare scelte diverse. Ad esempio l'insegnante può giocare a "La sfida del gatto nero" e fare un lancio che assegna punteggio 5 (oppure può anche solo ipotizzare una tale eventualità) e a quel punto chiedere: "come faccio ora a fare 12?".

Far di conto nel sistema di numerazione egizio

L'enigma "Il bersaglio di Seshat" (Fig. 3) propone un'ulteriore sfida rispetto agli enigmi precedenti: lo scopo del gioco è sempre quello di raggiungere un punteggio complessivo stabilito attraverso l'addizione dei punteggi parziali ottenuti, ma i numeri non sono rappresentati nelle familiari cifre indo-arabe, bensì attraverso geroglifici in uso nell'Antico Egitto. In particolare, Maggie deve centrare aree del bersaglio corrispondenti a numeri che, sommati, diano come risultato il numero rappresentato al centro dell'immagine, su sfondo rosso.



◆ **Fig. 3: Il bersaglio di Seshat**

In figura 4 sono rappresentati i geroglifici utilizzati per rappresentare le prime sette potenze di 10 nel sistema egizio: da 1, ossia 10^0, a un milione, ossia 10^6.

						
1	10	100	1000	10000	100000	1000000

◆ **Fig. 4: Le prime potenze del 10 nei geroglifici egizi**

» **Il confronto tra diversi sistemi di numerazione**

Si dovrebbe scoprire che si tratta del 34 e che, partendo dal riquadro in alto a sinistra e procedendo in senso antiorario, si possono trovare il 5, il 12, il 7, seguiti sul lato destro dalla sequenza 15, 3 e 11.
L'uso di un sistema di numerazione diverso apre la possibilità a un interessante approfondimento sui diversi sistemi di numerazione e sulla loro efficacia. Un confronto di questo tipo può portare sia ad apprezzare le potenzialità del nostro sistema numerico che a una maggiore consapevolezza dei suoi aspetti rappresentativi (che hanno un ruolo cruciale nello sviluppo dei diversi algoritmi per le operazioni).
In questo senso, proprio a livello di scuola primaria, segnaliamo l'albo illustrato "Uri, il piccolo sumero" (Firenze, Il Giardino di Archimede, 2008, di R. Petti, con illustrazioni di S. Frasca), che introduce attraverso la narrazione un altro sistema di numerazione: quello degli antichi Sumeri.

Tornando al sistema egizio messo in gioco nelle avventure di Maggie, è a base dieci, proprio come il nostro, ma con la grossa differenza di non essere posizionale (ovvero non conta la posizione in cui è inserito il simbolo), ma additivo (come il sistema di numerazione romano). Che cosa cambia? Il nostro modo di contare e di rappresentare i numeri, il sistema decimale posizionale, è molto potente: permette di rappresentare qualsiasi numero (grande quanto vogliamo) con sole 10 cifre e di conseguenza, per le operazioni, basta ricordarsi le tabelle (additive e moltiplicative) che mettono in gioco queste 10 cifre. Non va però dimenticato che tanta efficacia ha un costo: è un sistema di rappresentazione dei numeri complesso, la cui comprensione richiede notevole sforzo di astrazione, proprio perché il significato (valore) di un simbolo cambia a seconda della posizione che occupa: il 317 e il 173 sono numeri diversi scritti con le stesse cifre; infatti, nelle loro rappresentazioni le singole cifre, 1, 3 e 7, hanno significati diversi.
L'esempio scelto non è casuale: è ripreso dal quesito INVALSI 2012 per la seconda primaria in figura 5.

◆ **Fig. 5: Quesito INVALSI D10, livello 2, anno 2012**

D10. Quale tra i seguenti numeri corrisponde a 3 decine e 17 unità?

A. ☐ 317
B. ☐ 173
C. ☐ 47

Tale quesito ha evidenziato diverse difficoltà alla fine della seconda, dato che l'alternativa più scelta dal campione nazionale è stata la A (58.4% delle risposte), quella che da più vicino ricorda un approccio additivo in "stile egizio", mentre la risposta corretta (C) è stata individuata solo dal 34.8% dei ragazzi.
In questo senso, una preziosa risorsa per l'introduzione alla notazione decimale posizionale, attraverso numerosi artefatti matematici (come cannucce, abaci e Pascalina), è costituita dalla guida docente per la classe prima primaria sviluppata all'interno del progetto di ricerca *PerContare* e consultabile gratuitamente al sito http://percontare.asphi.it/.

Cifre

Uno sguardo agli enigmi: struttura e obiettivi

Le sfide contenute negli enigmi della serie "Cifre" richiedono a Maggie di determinare singole cifre o numeri a più cifre a partire da specifiche richieste, contenute in un misterioso messaggio arrivato con una lettera o nei vari dialoghi dei personaggi. Tali richieste riguardano relazioni e proprietà di ordinamento, additive e moltiplicative dei numeri naturali.

Nella tabella seguente riportiamo le consegne dei quattro enigmi della serie "Cifre".

Enigma	La sfida con le parole di Maggie
Il Lucchetto	"I due indizi dicono «Il rosso è il doppio del blu» ed «Entrambi sono pari». Quali saranno le cifre corrette?"
Il Numero del Volo	"I numero del nostro volo è formato da 3 cifre, ognuna maggiore della successiva. E mi ha anche detto che ogni cifra è un multiplo di 4."
L'Indovinello del Mercante	"Quindi la cifra delle decine è più grande di 5 rispetto alla cifra delle unità, mentre la cifra delle centinaia è più piccola di 8 rispetto alla cifra delle decine."
Le Costellazioni	"Due delle costellazioni hanno ciascuna un numero di stelle con esattamente tre divisori. E la terza costellazione... quale sarà quella sacra per Seshat?"

Gli enigmi richiedono perciò di:

- Interpretare le consegne, costituite da testi di tipo matematico (si noti la densità di informazione, la complessità sintattica della breve frase: "ognuna maggiore della successiva e tutte diverse tra loro");
- interpretare informazioni aritmetiche che coinvolgono: l'ordinamento dei numeri naturali ("ognuna maggiore della successiva"); la scrittura posizionale, che abbiamo discusso anche nel commento agli enigmi del tipo "Bersagli" ("cifra delle decine, delle centinaia, delle unità"), relazioni di tipo additivo ("è più grande di 5 unità") o moltiplicativo (il concetto di multiplo di un numero si ritrova in quasi tutti gli enigmi di questa tipologia, e nell'ultimo enigma entra anche quello correlato di divisore).

Tali compiti sono orientati prevalentemente verso il seguente ***traguardo per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria:*** *Legge e comprende testi che coinvolgono aspetti logici e matematici e verso l'****obiettivo di apprendimento al termine della classe 5a primaria****: Eseguire la divisione con resto fra numeri naturali; individuare multipli e divisori di un numero*, entrambi contenuti nelle Indicazioni Nazionali.

Analizziamo adesso più nel dettaglio alcune caratteristiche degli enigmi, che si prestano a un'attività di *problem solving* e congettura, oltre che a un possibile lavoro mirato sullo sviluppo linguistico in ambito matematico (e specificatamente aritmetico).

Ragionare sui multipli…e sullo zero!

Esaminiamo il secondo enigma della serie (Fig. 1), anche se un discorso analogo si potrebbe fare analizzando il primo enigma.



◆ Fig. 1: Il numero del volo

Nell'enigma "Il numero del volo" Maggie ha tre informazioni (numero di 3 cifre, cifre in ordine decrescente, tutte multiple di 4) che permettono di identificare univocamente il numero del volo: infatti gli unici multipli di 4 compresi tra 0 e 9 sono 0, 4 e 8. Gli indizi sull'ordinamento delle cifre ci dicono che il numero è 840.

» La definizione di multiplo di un numero

La scelta fatta degli indizi non è casuale, vuole riprendere la definizione di multiplo di un numero naturale, in questo caso 4, e cercare di creare le condizioni per scardinare una diffusa misconcezione (il multiplo di un numero è maggiore del numero stesso): i multipli naturali di 4 sono tutti i numeri che si possono ottenere moltiplicando 4 per un qualsiasi numero naturale. Quindi 0 è multiplo di 4, essendo 0 = 4*0, così come è multiplo di qualsiasi numero naturale.

Da una parte, in matematica il richiamo alla definizione dei concetti è molto importante: è dunque importante che ai bambini venga offerta l'occasione di lavorare su qualche prima definizione matematica accessibile (come ad esempio quella di multiplo, ma anche quella di altezza di un poligono in ambito geometrico). Dall'altra, proprio il controllo sulla definizione di multiplo sembra non essere più recuperato nemmeno in seguito, come dimostra la percentuale di risposte corrette (solo il 24%) al quesito INVALSI D6 della prova nazionale di terza secondaria di primo grado del 2014 (vedi Fig. 2).

◆ Fig. 2: Quesito INVALSI D6, livello 8, anno 2014

D6. Considera il numero 15. Raddoppialo, poi raddoppia il risultato, poi continua a raddoppiare. In questo modo arrivi a trovare <u>tutti</u> i multipli di 15? Scegli la risposta e completa la frase.

☐ Sì, perché .....
.....

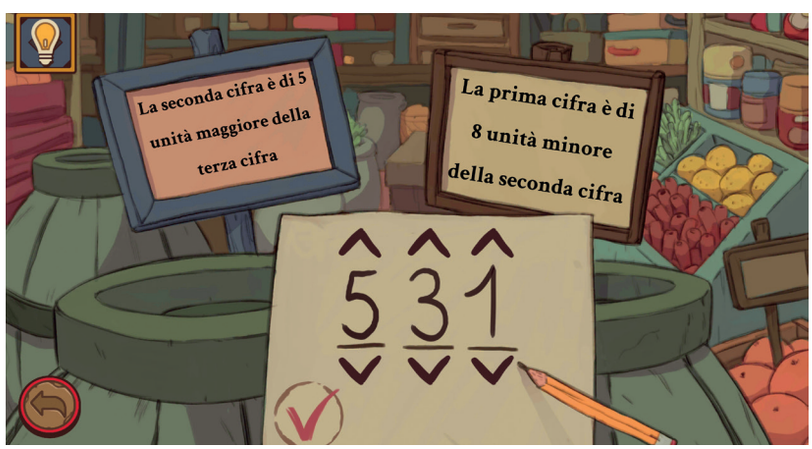
☐ No, perché .....
.....

» Variazioni de "Il numero del volo"

Tornando all'enigma per Maggie, si presta a molte possibili variazioni sul tema. Ad esempio, che succederebbe se, invece che multipli di 4, cercassimo multipli di 2 o 3, continuando a volere che ogni cifra rappresenti un numero strettamente maggiore di quello che è alla sua destra? Scopriremmo che, in questi due nuovi casi, Maggie non avrebbe tutte le informazioni per determinare con certezza il numero del volo, in quanto i numeri di tre cifre rispondenti ai vincoli richiesti sarebbero sempre due: per il 2, andrebbero bene il numero 420, come anche 842; mentre per il 3, entrambi i numeri 630 e 963 soddisferebbe le richieste. Per ciò che abbiamo discusso in precedenza (il fatto che i bambini non considerino 0 come multiplo di 2 e anche di 3) però, è possibile che in questi casi non emergano spontaneamente le due distinte soluzioni. In questo caso si può tentare di creare quesiti aritmetici dove la molteplicità di soluzioni dovrebbe essere evidente a tutti: ad esempio dire che la combinazione è un numero di due cifre, con le cifre messe in ordine decrescente e tutte multiple di 2. Se i bambini dovessero non considerare le combinazioni con la cifra 0 (che matematicamente, ribadiamo, sarebbero corrette), rimarrebbero comunque le seguenti sei combinazioni: 42, 62, 82, 64, 84, 86. Anche in questo caso, può essere interessante proporre in classi variazioni all'enigma che richiedano vincoli irrealizzabili, problemi impossibili (ad esempio, sostituendo il 4 con il 5 nell'enigma originale, visto che non esistono tre numeri diversi e minori di 10 multipli di 5).

Rimaniamo ancora sullo zero, passando a una sua caratteristica che può emerge dalla riflessione su un altro enigma: "L'indovinello del mercante" (Fig. 3).

◆ Fig. 3: L'indovinello del mercante



» Lo zero e i numeri a n cifre

Anche in questo caso Maggie deve individuare un numero di 3 cifre, questa volta con informazioni riguardanti relazioni di tipo additivo tra le tre cifre ("la cifra delle decine è più grande di 5 rispetto alla cifra delle unità, mentre la cifra delle centinaia è più piccola di 8 rispetto alla cifra delle decine"). Inoltre, come nell'enigma precedente, emerge una definizione matematica: un numero naturale si dice di tre cifre se il numero delle centinaia (la terza cifra) è diverso da zero e non ci sono (sono uguali a zero) le cifre delle migliaia, delle decine di migliaia e di tutte le potenze di 10 maggiori di cento. Rientra nella definizione data il numero 328, mentre non rientrano nella definizione data né lo 083 (che è detto di due cifre, perché la cifra diversa da zero più a sinistra nella scrittura decimale è l'8) né il 10237 (perché la cifra più alta diversa da 0 non è la terza, ma la quinta leggendo da destra verso sinistra, ovvero quella delle decine di migliaia).
Senza questa definizione, avremmo due soluzioni possibili all'enigma: 194 e 083. Quest'ultimo numero, corrispondente alla stringa formata dalle tre cifre 0, 8 e 3, per la definizione di numero a tre cifre data, non è a tre cifre, ma bensì a due (l'ultima cifra diversa da zero a partire da destra è la seconda).

» Lo zero: un ostacolo didattico

Chiudiamo questa sezione con un commento generale. La gestione sintattica dello zero, nella rappresentazione decimale dei numeri (si pensi anche al fenomeno per cui "gli zeri dopo la virgola non valgono"), e il suo significato semantico, che rimanda – nel significato cardinale del numero – alla "non presenza", fanno dello zero uno dei più riconosciuti ostacoli didattici del livello scolastico primario. Ciò non ci deve meravigliare, soprattutto se pensiamo che nella storia della matematica intere culture del passato hanno rifiutato l'idea di considerare lo zero come un vero e proprio numero. Eppure, o forse proprio per questo, lo zero tende a essere spesso escluso dalle pratiche didattiche di questo livello scolastico. D'altra parte, crediamo invece che sia importante riflettere e discutere sullo 0 a partire addirittura dalla scuola dell'infanzia ed evitare invece la differenziazione dello 0 come "numero speciale" per il quale ci si deve ricordare alcune cose (ad esempio, che non è positivo, né negativo; che non si può dividere per 0 etc. A proposito, una questione interessante su cui invitiamo il lettore a riflettere: ma 0 è pari o no?). Come suggerisce Bruno D'Amore (vedi http://welles.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/623%20I%20bambini%20e%20lo%20zero.pdf), lo 0 è un oggetto complesso che racchiude tre significati distinti: lo 0 come cifra fondamentale del sistema posizionale che utilizziamo, lo 0 come cardinale (spesso associato all'assenza), lo 0 come ordinale. Un gioco (a livello di scuola dell'infanzia) per far emergere il senso ordinale dello 0 è il seguente: si fa salire i bambini su una scaletta con la regola di dover dire il numero dello scalino prima di salirci sopra ("uno", "due", "tre", "quattro"), stessa cosa a ritroso, mentre si scende ("tre", "due", "uno"). Nasce così l'esigenza di costruire l'idea di un primo numero/punto di partenza, e di dargli un nome, per poter scendere dall'ultimo gradino della scala.

Riflessioni sugli aspetti linguistici

Probabilmente, per la maggior parte dei ragazzi la vera sfida degli enigmi "Cifre" è di natura linguistica. Per cominciare, pensiamo a quanto siano ricorrenti nella serie le "frasi comparative", cioè quelle attraverso cui sono espresse:

- le relazioni di ordinamento (ad es., "*ognuna* [ogni cifra] *maggiore della successiva*");
- le relazioni additive (ad es., "la cifra delle decine è più grande di 5 rispetto alla cifra delle unità");
- le relazioni moltiplicative (ad es., "Il rosso è il *doppio del* blu").

Una difficoltà molto diffusa nella comprensione di queste frasi è, ad esempio, il cosiddetto "errore di inversione", che consiste nel confondere il soggetto della frase con il termine di paragone. Cioè, non ci sorprenderebbe se al primo enigma, "Il lucchetto" (vedi tabella sopra), molti ragazzi rispondessero

con 24 invece che con 42. A testimonianza della complessità di interpretazione di espressioni di questo tipo, anche in questo caso sono significativi i dati di un quesito INVALSI di livello 5 (Fig. 4).

◆ Fig. 4: Quesito INVALSI D16, livello 5, anno 2015

D16. Un numero naturale moltiplicato per 8 dà come risultato 32. Qual è la metà di quel numero?
Risposta: .....

Le risposte esatte a tale quesito sono state il 51.1% delle totali (le errate il 41.9% e le non date il restante 7%). Siamo convinti che a determinare un simile insuccesso del campione nazionale siano state prevalentemente le difficoltà linguistiche, nella comprensione sia della prima frase ("Un numero moltiplicato per 8 dà come risultato 32", in cui è possibile notare il germe del linguaggio algebrico), sia della domanda ("Qual è la metà di quel numero?", che contiene un'espressione comparativa).
Un lavoro molto ricco in ottica di sviluppo linguistico, in ambito matematico ma non solo, potrebbe essere una ripresa in classe degli enigmi che si prenda cura in maniera mirata dei testi delle consegne. In particolare, partire dai processi interpretativi messi in atto dagli stessi allievi darebbe all'insegnante l'occasione di lavorare sulle loro specifiche difficoltà linguistiche.
In questa ottica, sottolineiamo come negli enigmi, oltre alle frasi comparative, compaiano molte altre espressioni, la cui comprensione richiede competenze nell'ambito del cosiddetto *linguaggio scientifico*: "entrambi", "ognuna", "diverse tra loro", "ogni", "ciascuna" ed "esattamente tre".

Ponti

Uno sguardo agli enigmi: struttura e obiettivi

Nella serie di enigmi "Ponti" Maggie deve pianificare tragitti reali o immaginari che rispettino alcuni vincoli via via sempre più complicati.
Riportiamo in tabella le consegne relative ai quattro enigmi della serie "Ponti".

Enigma	La sfida con le parole di Maggie
La strada verso il club	"Partendo da casa devo andare in gelateria, poi in cartoleria e per ultimo al Club degli Archeologi. Ma voglio trovare un percorso che mi permetta di non ripassare mai due volte per la stessa strada!"
L'imbarco	"Siamo all'ingresso dell'aeroporto e dobbiamo raggiungere l'aereo dopo aver visitato tutti i negozi. Ogni volta che passiamo da un controllo di sicurezza non possiamo più tornare indietro."
Il sogno di Maggie	"Chissà se esiste un modo per visitarle tutti i tratti della costellazione senza mai ripassare dalla stessa strada..."
In bilico sulla corda	"Tutti i frammenti sono importanti, devo solo trovare un modo per non ripassare due volte sullo stesso tratto di corda."

» **La teoria dei grafi in classe**

Dal punto di vista matematico, siamo nell'ambito di quella che è nota come teoria dei grafi, la cui nascita si fa risalire ad alcuni risultati del grande matematico e fisico svizzero del Settecento Leonhard Eulero. Il riferimento alla teoria dei grafi e a grandi matematici potrebbe indurre a pensare che si tratti di aspetti fuori dalla portata dei bambini di scuola primaria, ma noi siamo convinti che non sia così, e che non solo i quesiti proposti siano accessibili e stimolanti, ma che possano essere usati per lavorare su obiettivi di apprendimento specifici della scuola primaria.
Per quanto riguarda l'accessibilità, la teoria dei grafi può trattare questioni e porre problemi anche molto complessi, ma scegliendo opportunamente i vincoli, la richiesta di individuare almeno un percorso che li rispetti può essere calibrata per qualsiasi livello (addirittura anche per la scuola dell'infan-

zia). Tale richiesta infatti può essere affrontata a partire (e tipicamente succede così a livello di scuola primaria, ma non solo) dal classico metodo per prova ed errore.
L'accessibilità a livello di scuola primaria, ma anche l'interesse che ci può essere da parte dei bambini per questioni legate alla teoria dei grafi, sono in un certo senso confermati dal fatto che una recente storia pubblicata su Topolino n. 3232, dal titolo "Paperino e i ponti di Quackenberg" (soggetto del matematico Alberto Saracco e di Francesco Artibani, disegni di Marco Mazzarello), sia dedicata a uno dei più famosi problemi di questo tipo, risolto proprio da Eulero.
Per quanto riguarda gli obiettivi di apprendimento, tra quelli inclusi alla fine della terza primaria nelle Indicazioni Nazionali ne appare uno strettamente in relazione con il tema degli enigmi "Ponti"*: Eseguire un semplice percorso partendo dalla descrizione verbale o dal disegno, descrivere un percorso che si sta facendo e dare le istruzioni a qualcuno perché compia un percorso desiderato.*
Proprio a questo obiettivo fa riferimento il quesito INVALSI D17 del 2013 di livello 5 riportato in Fig. 1. Questo e altri quesiti INVALSI per il primo ciclo del 2013 sono stati analizzati in una ricerca-azione sviluppata all'Università di Pisa che ha prodotto 4 quaderni di commento alle prove – uno per ogni ambito – reperibili su fox.dm.unipi.it/invalsi.

D17. Questa è la mappa di una parte della rete metropolitana di Milano.



Quanti sono i percorsi possibili per andare da Cadorna a Loreto senza passare due volte da una stessa fermata?

A. ☐ 1
B. ☐ 2
C. ☐ 3
D. ☐ 4

◆ Fig. 1: Quesito INVALSI D17, livello 5, anno 2013

Tale quesito ha avuto esiti piuttosto disastrosi (sul campione nazionale, poco più del 10% le risposte corrette) e, come riportato nel quaderno relativo all'ambito Spazio e Figure, le motivazioni sono molteplici. Tra esse troviamo, ad esempio, l'astrattezza del contesto della metropolitana per molti bambini italiani e la delicatezza dell'espressione "percorsi possibili", spesso (giustamente) interpretata dai bambini come "percorsi possibili sensati". Approfittiamo per osservare che gli enigmi affrontati da Maggie cercano di proporre contesti (reali o fantastici) meno *astratti* per i bambini, ossia meno lontani dalla loro mondo.
Tornando agli obiettivi didattici, anche per questa serie di enigmi, analizzando più da vicino le specifiche richieste emergono diversi altri spunti e possibili intrecci con quanto richiesto dalle Indicazioni Nazionali: in particolare, al di là dei contenuti specifici messi in gioco, relativamente a traguardi di competenza fondamentali come quelli legati al problem solving e al problem posing (ovvero la com-

petenza di porsi le *giuste* domande). Ovviamente, per perseguire tali finalità è necessario tornare sugli enigmi in classe dopo il gioco, con attività e discussioni mirate.
Il ritorno in classe può permettere anche di affrontare questioni didatticamente significative e interessanti che non possono essere inserite in una App di questo tipo: ad esempio, proponendo di discutere l'esistenza o meno di percorsi che soddisfano determinati vincoli, vincoli scelti appositamente affinché il percorso sia irrealizzabile (un problema di questo tipo è quello legato ai sette ponti di Königsberg a cui si rifà la storia di Topolino citata). Il proporre problemi che non hanno soluzione, da una parte è importante perché rompe una clausola tipica del contratto didattico (un problema scolastico ha sempre soluzione), clausola che azzera la necessità dell'allievo di riflettere sulla situazione problematica e sulla sua risolubilità: questa responsabilità è totalmente delegata all'insegnante (o al libro di testo che propone il problema). Dall'altra, può permettere un'interessante discussione su come provare che un problema non ha soluzione: il fatto che non si riesca a trovare una soluzione per prova ed errori è sufficiente a farci dire con certezza che il problema non ha soluzione? Ovviamente la risposta è no, ma per convincere gli allievi bisognerebbe poi utilizzare un problema con soluzione (difficile) e far vedere come il non averla trovata non significhi che la soluzione non esista.

Dal punto di vista della teoria dei grafi, gli enigmi proposti sono di due tipologie distinte: c'è infatti una specifica caratteristica che distingue ciò che è richiesto ne "La strada verso il club", "L'imbarco" e "In bilico sulla corda", da ciò che è richiesto ne "Il sogno di Maggie".
Prima di esplicitare questa differenza, proponiamo all'insegnante di pensare alle differenze che lui stesso riconosce tra le consegne. Gli proponiamo altresì di sollecitare la stessa riflessione in classe.
Lo scopo di tre enigmi su quattro è di passare per determinati *punti* su di una mappa, avendo alcuni vincoli sul percorso (ad esempio non passare due volte per la stessa strada), mentre l'obiettivo ne "Il sogno di Maggie" è di passare per tutte le *strade* una e una sola volta (questo implica che Maggie raggiungerà anche tutti i punti della mappa – stelle in questo caso – e nulla vieta che possa passare più volte per la stessa stella).

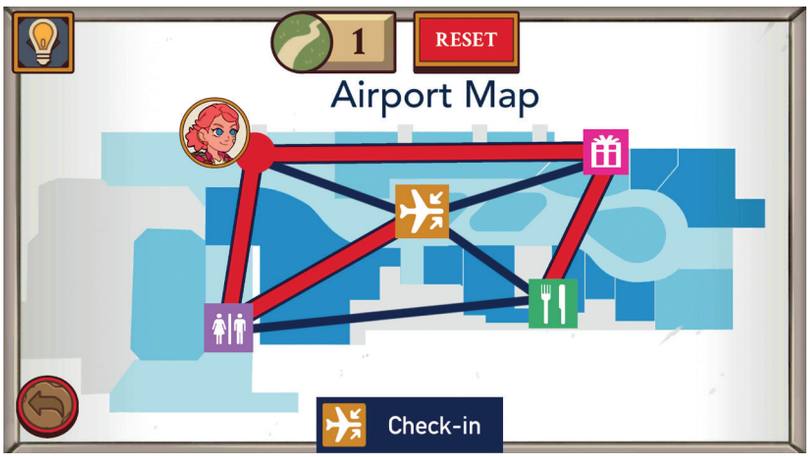
» La discussione matematica di classe

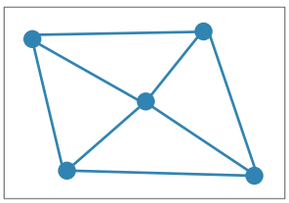
Come detto, è piuttosto probabile che gli studenti procedano per tentativi nella ricerca del percorso che rispetti i vincoli e realizzi lo scopo. A seguito di ciò è importante cercare di far emergere le diverse strategie (e i diversi tentativi eventualmente fatti), discutendo a livello di gruppo classe anche le scelte effettuate. Se, come è probabile, la strategia più adottata è per prova ed errore, quali tentativi sono stati fatti? Perché si è fatto proprio *quel* tentativo e non un altro? Se invece non si è andati per prova ed errore, quale tipo di approccio è stato adottato e sulla base di cosa si è deciso di adottarlo?
È evidente che discussioni di questo tipo, che mirano a collocarsi a un livello metacognitivo, siano molto complesse: ma abituare gli allievi anche solo a tentare di descrivere cosa hanno fatto e perché è una consuetudine didatticamente importante, al di là dei risultati che si ottengono nel brevissimo termine ed è essenziale per poter poi lavorare sulla discussione delle strategie adottate. C'è anche un aspetto di condivisione di significatività, il solo fatto di richiedere l'esplicitazione della strategia adottata a prescindere dalla correttezza o meno della risposta, passa agli allievi un messaggio significativo: l'insegnante dà valore ai processi, alla loro descrizione e alla loro spiegazione e non solo al risultato.

» Il grafo come esempio di astrazione matematica

Un altro argomento di discussione significativo che si può affrontare a partire dagli enigmi proposti riguarda il grado di astrazione nella modellizzazione della situazione problematica e, in particolare, l'eventuale riconoscimento delle proprietà degli oggetti in gioco che entrano in gioco nella questione posta. Questo processo è tipico della matematica e mira a riconoscere somiglianze strutturali tra situazioni apparentemente diverse.
Il punto qui è la completa irrilevanza, al di là del contesto narrativo, della natura dei punti di interesse (siano essi negozi o rocce su cui raccogliere oggetti) e delle strade (che possono essere anche corde).

In teoria dei grafi non a caso si parla di *vertici* o *nodi* per i punti e di *archi* per le strade che congiungono due punti: la mappa (ovvero un certo insieme di nodi e archi) è detta *grafo*. Negli enigmi, tutte le condizioni si potrebbero riformulare in termini di punti (vertici o nodi) e linee (archi) che congiungono due punti e le richieste come la ricerca di determinati *cammini* (un cammino è un certo tragitto sul grafo che non ripassa due volte dallo stesso arco). In figura 2 possiamo vedere una rappresentazione del grafo che corrisponde alla mappa dell'aeroporto.



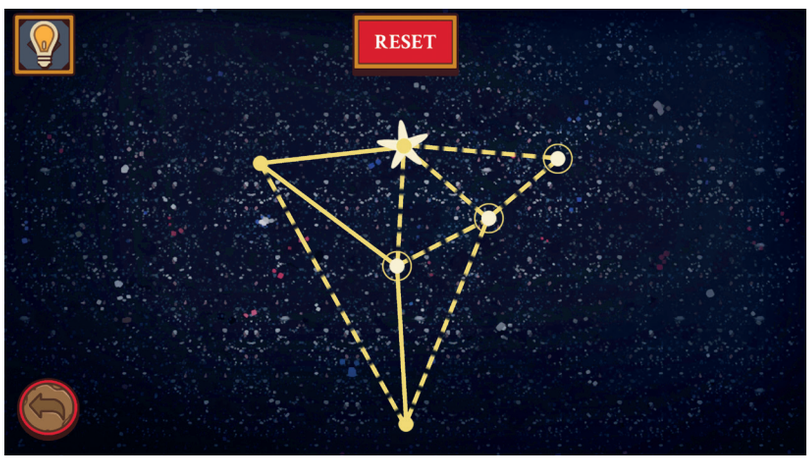


◆ Fig. 2: La mappa de L'imbarco e il grafo associato

Si può osservare, ad esempio, che l'enigma "L'imbarco" fissa il punto di partenza e il punto di arrivo: in questo caso è dunque determinante etichettare i nodi. Mentre, per lo stesso problema (e anche per tutti quelli che rientrano nella teoria dei grafi, che non si occupa di percorsi di minima lunghezza) sono matematicamente irrilevanti le distanze tra un nodo e l'altro, così come la forma del cammino. Per questo in figura 2 abbiamo voluto rappresentare la mappa con un grafo che, percettivamente, non ha la sua stessa forma: eppure, le due configurazioni della figura 2 (quella originale e quella modellizzata) sono equivalenti per quanto riguarda la questione posta dal problema.

Il sogno di Maggie: la ricerca di un cammino "particolare"

Come anticipato, l'enigma "Il sogno di Maggie" chiede qualcosa di diverso rispetto agli altri tre: chiede di passare per tutti gli archi, ma una sola volta, senza però dare nessuna indicazione né sul nodo (stella) di partenza, né su quello di arrivo. Appare evidente come questo possa aumentare di molto le possibilità da esplorare con il metodo per prova ed errori, e dunque come sia importante una qualche pianificazione a priori dei tentativi stessi.



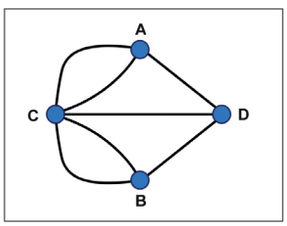
◆ Fig. 3: La costellazione da esplorare ne Il sogno di Maggie

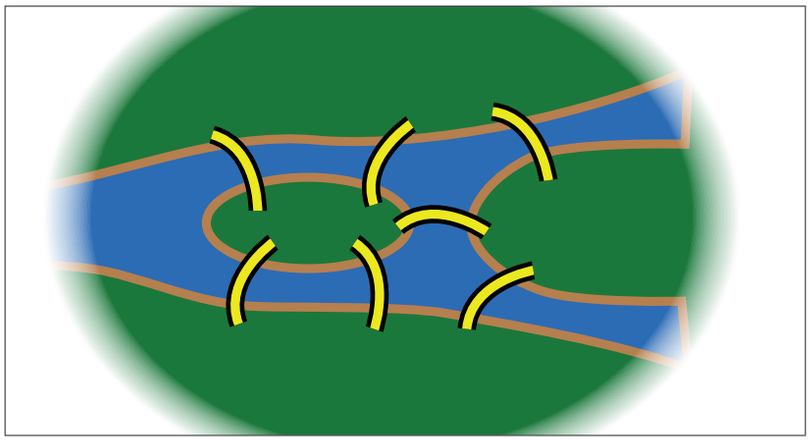
Dato un qualsiasi grafo, un cammino come quello richiesto a Maggie in questo enigma si chiama *euleriano*, proprio dal nome di Eulero, che ha risolto il problema dei sette ponti di Königsberg ripreso nella storia di Topolino già citata.

» **Il problema dei sette ponti di Königsberg**

Il problema è ambientato nell'antica città di Königsberg, uno dei capoluoghi della Prussia, attualmente enclave russa tra Polonia e Lituania chiamata Kaliningrad. Questa è divisa dal fiume Pregel in quattro zone e un tempo contava sette ponti come rappresentato in figura 4 (la parte verde indica la città, quella azzurra il fiume e in giallo sono disegnati i ponti).

◆ **Fig. 4: I sette ponti sul fiume Pregel e il grafo associato**





Eulero si chiede se sia possibile passeggiare per Königsberg attraversando tutti e sette i suoi ponti e in modo da passare su ciascuno di essi una sola volta; nessun vincolo è invece messo sul numero di volte in cui si visita una stessa zona della città. La prima cosa che possiamo osservare è che la *pretesa* di Eulero può apparire bizzarra ai bambini: non si vuole visitare tutte le zone della città, ma passare da tutti i ponti e senza passarci più di una volta, appunto si vuol capire se esiste un cammino euleriano sul grafo relativo alla mappa di Königsberg, in cui i nodi sono le diverse zone della città e gli archi sono i ponti sul fiume. Al di là della valutazione sulla stranezza dei *vincoli* (in particolare l'interesse a passare su tutti i ponti e non da tutte le zone della città), si può notare con i bambini che, essendo ogni zona raggiunta da almeno un ponte, voler passare da tutti i ponti permette di visitare tutte le zone della città.

Il problema dei sette ponti di Königsberg, insieme con le sue molteplici variazioni, ha tutte le caratteristiche per essere al centro di una ricca attività laboratoriale, a livello di scuola primaria e oltre. Innanzitutto, è un problema facile da formulare e la sua modellizzazione può stimolare il processo di astrazione, che permette di passare dalla mappa al grafo. Inoltre, a differenza dell'enigma "Il sogno di Maggie", la natura del problema è diversa in quanto la risposta alla domanda che si pone Eulero è NO, non esiste la possibilità di passare da tutti i ponti non ripercorrendo mai uno stesso ponte (cioè non esiste un cammino euleriano del grafo in figura 4). Questa seconda caratteristica apre la possibilità ad una interessantissima discussione su "come si fa a dire che un problema di questo tipo non ha soluzione?", utile per contribuire a condividere con i bambini un bagaglio di conoscenza su aspetti epistemologici fondamentali della matematica. Infatti, mentre per dire che il percorso de "Il sogno di Maggie" è realizzabile basta evidentemente trovare un modo di realizzarlo, per dire che la richiesta di Eulero non è soddisfacibile non basta non riuscire a trovare un cammino come quello voluto (almeno che non si abbia un modo per esaminare tutti i possibili cammini), perché ciò potrebbe anche dipendere dalla nostra incapacità di individuarlo. Ossia, i nostri tentativi falliti non escluderebbero la possibilità che possa provarci qualcuno, molto più bravo o paziente di noi, che si mette lì e lo trova. Serve un'argomentazione generale e solida che garantisca che nessuno possa trovarlo.

Nel caso specifico del nostro problema, la spiegazione del perché questo non sia possibile è sicura-

mente acuta, ma riguarda un concetto molto semplice: quello della parità/disparità dei ponti per ogni zona della città. Si può decidere di condividere questa spiegazione, che è riportata anche nella storia di Topolino già citata, ma non è essenziale; la cosa più importante è riflettere sul fatto che, per dire che un cammino euleriano non esiste, o siamo sicuri di aver controllato tutti i percorsi possibili – difficile – oppure dobbiamo avere un ragionamento che vada al di là dell'esperienza dei pochi o tanti tentativi falliti. Cosa c'entra la parità/disparità dei ponti per zona?

Descriviamo innanzitutto la situazione iniziale: ci sono 4 zone a Königsberg che nel grafo di figura 4 abbiamo indicato con A, B, C, D, rispettivamente con 3, 3, 5, 3 ponti. Non c'è quindi nessuna *isola* completamente scollegata dalla terraferma, senza ponti, e questo è il motivo per cui, come abbiamo già scritto, volendo passare da tutti i ponti dobbiamo necessariamente passare da tutte le zone della città.

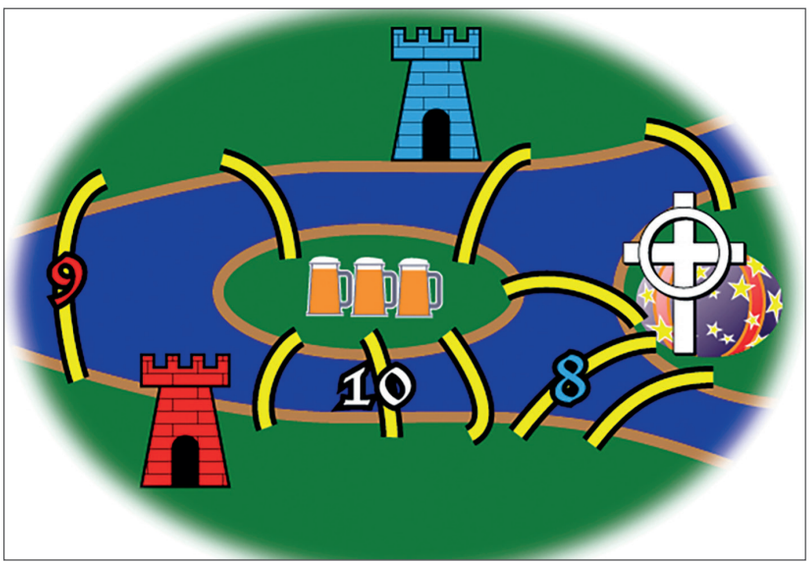
Osserviamo che, se pensiamo a un qualsiasi percorso, le zone della città vengono divise in tre tipologie: la zona di partenza, la zona di arrivo e le altre che chiamiamo "zone di passaggio" (da dove non partiremo, né arriveremo alla fine del nostro cammino). Inoltre:

- volendo, la zona di partenza può coincidere con quella di arrivo;
- la zona di partenza e di arrivo potranno essere anche di passaggio durante la passeggiata (visto che, come abbiamo osservato, Eulero non pone vincoli sul numero di passaggi da una stessa zona, vuole *semplicemente* non passare due volte da uno stesso ponte).

A questo punto abbiamo tutti gli elementi per spiegare perché non esista un cammino come quello voluto da Eulero. Nelle zone di passaggio (che in questo caso sono almeno 2, visto che i nodi sono 4) si deve entrare e uscire (altrimenti non sarebbero di passaggio, appunto) e quindi ogni volta che ci si passa si devono usare 2 ponti diversi: se ci passo una volta mi servono 2 ponti, se ci passo due volte me ne servono 4 (e sappiamo già che non ci possiamo passare più di due volte perché ci servirebbero almeno 6 ponti e nessuna zona ne è provvista). Insomma, le zone di passaggio devono avere un numero pari di ponti per essere tali. Analogamente, quelle di partenza e di arrivo, invece, se non coincidono, devono avere un numero dispari di ponti (il lettore provi a spiegare perché).

Nel grafo di Königsberg non esistono zone con un numero pari di ponti, quindi nessuna zona può essere di passaggio per un cammino euleriano…e dunque non è possibile fare quello che chiede Eulero.

Concludiamo osservando che a questo punto si può proporre ai bambini di *costruire* uno o più ponti per rendere possibile la camminata di Eulero o anche, virtualmente, di spostare ponti sul grafo con lo stesso obiettivo. Si può arrivare a proporre tutta una gamma di variazioni del problema di Eulero considerando grafi diversi: un esempio di variazione a partire dal grafo di Königsberg è riportato in figura 5.



◆ **Fig. 5: Tre nuovi ponti per la città di Königsberg**

Testi a cura di Gemma Carotenuto, Pietro Di Martino, Enrica Ficai Veltroni, Caterina Primi, Patrizia Salmoiraghi

Maggie è la protagonista dell'educational app **Maggie-Il Tesoro di Seshat** del Soroptimist International d'Italia, associazione femminile no profit impegnata nella promozione del potenziale delle donne e nella tutela dei diritti umani. www.soroptimist.it

L'app è nata da un'idea di Enrica Ficai Veltroni e Caterina Primi (Soroptimist International Club Firenze); consulenza per i contenuti scientifici di Pietro Di Martino (Università di Pisa - Dipartimento di Matematica); sviluppata da Studio Evil S.r.l.

Tutti i diritti di utilizzo del personaggio Maggie, dell'app Maggie e dei contenuti e immagini del presente fascicolo "Come e perché portare Maggie in classe" sono del Soroptimist International Club Firenze

App gratuita scaricabile da appmaggie.com e da Applestore e Google play

Soroptimist International d'Italia

© 2019 Soroptimist International Club Firenze

Il presente fascicolo è stato realizzato con la collaborazione di GIUNTI Scuola - www.giuntiscuola.it